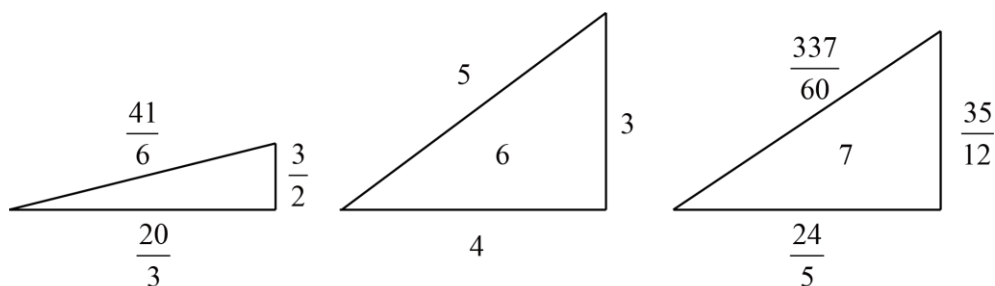


## 32 同餘數與斐波那契問題

### 32.1 同餘數與例子

一個正整數  $N$  稱為同餘數是指“存在一個三邊都是有理數的直角三角形且此直角三角形的面積恰為  $N$ ”。例如  $N=5,6,7$  都是同餘數，它們所對應的直角三角形如下（註：很多有理數邊長的直角三角形之面積為同一個同餘數  $N$  是可能發生的）：

- (1) 勾，股分別為  $\frac{20}{3}, \frac{3}{2}$ ；而弦為  $\frac{41}{6}$  的直角三角形的面積為 5。因此  $N=5$  為同餘數。
- (2) 勾，股分別為 3,4；而弦為 5 的直角三角形的面積為 6。因此  $N=6$  為同餘數。
- (3) 勾，股分別為  $\frac{24}{5}, \frac{35}{12}$ ；而弦為  $\frac{337}{60}$  的直角三角形的面積為 7。因此  $N=7$  為同餘數。



事實上， $N=157$  也是一個同餘數，它所對應的有理數邊長直角三角形如下：

$$\begin{aligned} \text{勾} &= \frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203} \\ \text{股} &= \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610} \\ \text{弦} &= \frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830} \end{aligned}$$

（由 D. Zagier 計算得到）

$$\begin{array}{r} \frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830} \\ \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610} \\ \frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203} \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \text{157} \end{array}$$

## 32.2 斐波那契問題

斐波那契在 1225 年參加羅馬皇帝腓特烈二世所舉行的數學競賽，他解出了所有的數學問題，輕易的拿到冠軍。其中有一題與同餘數相關，斐波那契算出底下的式子：

$$\begin{cases} \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2, \\ \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2. \end{cases}$$

這個式子後來出現在斐波那契獻給熱中學術活動的腓特烈二世的書《平方數之書》上。事實上，第九世紀以前，阿拉伯的紙草上就有這樣的一則問題：給定一個正整數  $N$ ，是否可以找到三個正有理數  $x, y, z$  使得

$$\begin{cases} x^2 - N = y^2, \\ x^2 + N = z^2. \end{cases}$$

現在我們都稱這樣的問題為斐波那契問題。斐波那契問題與同餘數問題是緊密不可分的，這可由底下的定理看出來。

**定理 32.1** 設  $N$  是一個正整數，則底下兩則敘述是一樣的。

- (1)  $N$  是一個同餘數。
- (2) 斐波那契問題對正整數  $N$  有解。

【證明】

(1)  $\Rightarrow$  (2)：設有理數  $p, q, r$  滿足： $p^2 + q^2 = r^2, pq = 2N$ ，則

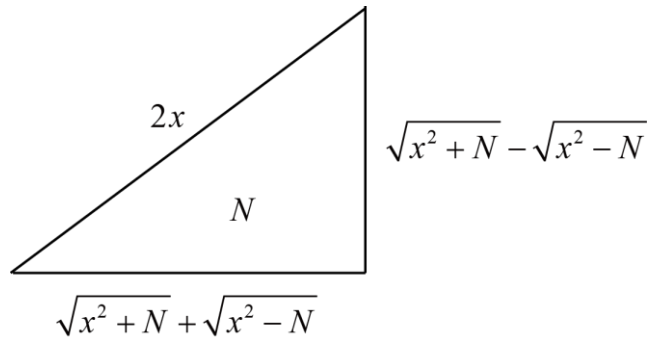
$$\begin{cases} \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - N = \left(\frac{r}{2}\right)^2, \\ \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + N = \left(\frac{r}{2}\right)^2. \end{cases}$$

因此，斐波那契問題對正整數  $N$  有解。

(1)  $\Leftarrow$  (2)：設斐波那契問題對正整數  $N$  有解，則可以找到正有理數  $x, y, z$  滿足

$$\begin{cases} x^2 - N = y^2, \\ x^2 + N = z^2. \end{cases}$$

考慮底下的直角三角形，得到： $N$  是一個同餘數。



### 32.3 $N = 3$ 不是同餘數

**定理 32.2**  $N = 3$  不是同餘數。

【證明】 假設  $N = 3$  是一個同餘數且

$$\frac{x}{q}, \frac{y}{q}, \frac{z}{q}$$

構成一個面積為 3 的直角三角形的（勾，股，弦）三有理數邊，其中  $x, y, z, q$  為正整數

且可令  $x, y, z$  兩兩互質。因為  $z^2 = x^2 + y^2$ ，所以存在互質的正整數  $m, n$  使得

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2, \\ y = 2mn, \\ z = m^2 + n^2, \\ mn(m^2 - n^2) = 3q^2 \quad (\text{因為面積為3的關係}), \end{cases}$$

其中正整數  $m, n, m^2 - n^2$  兩兩互質且正整數  $m, n$  為一奇一偶。由式子  $mn(m^2 - n^2) = 3q^2$  可

分成下列三種來討論：

(1) 若  $3 \mid m$  則由式子  $mn(m^2 - n^2) = 3q^2$  可得  $m^2 - n^2$  必是一個完全平方數，且令

$$m^2 - n^2 = q_1^2, \text{ 即 } n^2 + q_1^2 = m^2. \text{ 因此 } 3 \mid n \text{ 或 } 3 \mid q_1, \text{ 即 } 3 \mid (m, n) \text{ (由 } 3 \mid m, n^2 + q_1^2 = m^2 \text{ 得}$$

到)，這與  $m, n$  互質不合。

(2) 若  $3 \mid n$  則由式子  $mn(m^2 - n^2) = 3q^2$  的分解可得  $m = a^2, n = 3b^2, m^2 - n^2 = c^2$ , 其中  $a, b, c$  為正整數；因此  $a^4 - 9b^4 = c^2$ ；此與**定理 25.4** 矛盾。

(3) 若  $3 \mid m^2 - n^2$  且  $m, n$  不為 3 的倍數，則由式子  $mn(m^2 - n^2) = 3q^2$  的分解可得

$$\begin{cases} m = a^2, n = b^2, \text{ 正整數 } a, b \text{ 互質, 一奇一偶且 } 3 \nmid ab, \\ (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4 = 3q_2^2, q_2 \text{ 為正整數.} \end{cases} \quad (32.1)$$

因為正整數  $a, b$  互質，一奇一偶且不被 3 整除，所以有

$$\begin{cases} (a^2 - b^2, a^2 + b^2) = 1, \\ 3 \mid a^2 - b^2. \end{cases} \quad (32.2)$$

由式子(32.1)與(32.2)得到

$$a^2 + b^2 = q_3^2 \Rightarrow a, b \text{ 至少有一個為 3 的倍數.}$$

這與  $a, b$  不為 3 的倍數不合。

綜合得知： $N = 3$  不是同餘數。

### 習題 32.1 證明

(1) 若  $N = 1$  是同餘數則證明方程式

$$x^4 - y^4 = z^2$$

有正整數解  $x, y, z$ .

(2) 證明  $N = 1$  不是同餘數。

### 習題 32.2 證明 $N = 2$ 不是同餘數。

### 習題 32.3 證明 $N = 14$ 是同餘數。

### 習題 32.4 證明 $N = 15$ 是同餘數。

習題 32.5 證明  $N = 41$  是同餘數。

習題 32.6  $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2})$  是斐波那契問題對正整數  $N = 6$  的一組解，是否可以找到其它的解。

### 動手玩數學

平面上由上而下依序劃三條相異的平行線，其中第一條與第二條、第二條與第三條的距離分別為  $d_1, d_2$ 。試問：可以在三條直線上各取一點，使它們構成一個正三角形嗎？又此正三角形的邊長為何？

### 挑戰題

在一個邊長為  $3a$  的正方形上放著一支長度為  $5a$  寬度為  $a$  的直尺。試問此直尺應該如何擺設才能使蓋住的面積為最大？此蓋住的最大面積又是多少呢？

### 同餘數

$N = 7$  是同餘數為大數學家尤拉發現的。事實上，古代就可以證明： $N = 1, 2, 3, 4$  都不是同餘數，另外  $N = 13, 14, 15$  亦知是同餘數。

同餘數問題是相當古老的問題，它的判別也很不容易。數學家一直到最近才有比較多的進展，不過距離解決此問題也許仍有一段距離。如果  $P$  是一個被 8 除之，餘數為 3 的質數則數學家可以證明： $P$  不是同餘數，但是  $2P$  是同餘數。

著名的歐特-庫爾第-洼田忠彥猜想是說：如果正整數  $N$  滿足  $N \equiv 5, 6, 7 \pmod{8}$  則  $N$  是同

餘數。

從較深的橢圓曲線的知識，我們可以得到判斷同餘數較好的方法如下：假設橢圓曲線

$E_N: y^2 = x^3 - N^2x$ ，則  $N$  是同餘數的充分必要條件為橢圓曲線  $E_N$  有無窮多組有理數解  $(x, y)$ 。

同餘數問題是歷史上的難題，有關它的研究有很多。當  $n$  為正整數時，

$N = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$  及  $N = 8n^3 - 2n$  都是同餘數。讀者可以用斐波那契方法試試看。

與同餘數相關的另一個問題是由印度數學家婆羅摩笈多發現的：設以有理數  $a, b, c$  為邊長的三角形面積亦為有理數。那麼一定可以找到正有理數  $u, x, y$  使得

$$\begin{cases} a = \frac{u^2 + x^2}{x}, \\ b = \frac{u^2 + y^2}{y}, \\ c = \frac{u^2 - x^2}{x} + \frac{u^2 - y^2}{y}. \end{cases}$$

有興趣的讀者，可以試試看這則第六世紀的問題。